がしばしばあるものですし，また新しい物理的 picture が得られて見通しがよくなることもありますから，この種の研究も大いに発展させるべきだと思います。

常識に対する批判的研究のもう１つの方向としては，従来理論物理において甚だ気軽に考えられていたスペクトルの概念のより厳密な意味を明らかにして，スペクトルの問題と散乱の問題の基礎的関係や， resonance mode の正確な意味などをはっきりさせようとする仕事があります。しかし数学的困難のため，この種の問題に関してはAsahiの差分方程式のスペクトルの理論を除いてはあまり具体的な仕事はまだ出ていません。このような"深刻な"問題をとり扱かうことの意義については，グループの中でもいろいろな意見がありますが，研究会における討論などの基調には，つねにこの傾向の問題意識があったことは否定出来ないと思います。

どうも，独断的なところが多々あったのではないかという気がしまして恐縮ですが，これで現在までの経過の大ざっぱな報告を終りたいと思います。

流体力学における非線型問題

巽　友正（京大理）

§1. 流体力学の構成

流体が運動状態にあると否とを問わず，その物理的性質は密度ρ，圧力p，温度T，内部エネルギーε，エントロピーsなどの熱力学的量によって規定される。そして，流体が運動しているときには，その運動は速度$\mathbf{u}$によって記述される。これらの量はすべて，座標$\mathbf{x}$，時間tの函数である。

流体の運動はつぎのいくつかの保存則を表わす方程式によって支配される。

連続方程式（質量保存）：
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \,, \tag{1}$$

運動方程式（運動量保存）：
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathrm{grad}(-p+\sigma) + \rho \mathbf{f} \,, \tag{2}$$

エネルギー方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}|\mathbf{u}|^2+\varepsilon\right)+\mathrm{div}\left\{\left(\frac{\rho}{2}|\mathbf{u}|^2+\varepsilon\right)\mathbf{u}\right\}$$
$$=\mathrm{grad}\left\{(-p+\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}+\mathbf{q}\right\}+\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}, \tag{3}$$

ただし,$\mathbf{f}$ は外力で，$\boldsymbol{\sigma}$，$\mathbf{q}$ はそれぞれ，

粘性応力 $\boldsymbol{\sigma}$ ：
$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{\mu}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\delta_{ij}, \tag{4}$$

熱　流 $\mathbf{q}=-k\,\mathrm{grad}\,T$, (5)

μ は粘性率，k は熱伝導率を表わす。

これらの保存則以外に，流体の物理量の間にある関係式が成立することを仮定する。普通このため，流体は運動状態においても熱力学的平衡状態にあると仮定する。この種の関係式に，

状態方程式：　$f(\rho.p.T)=0.$ (6)

と呼ぶ。

流体の運動を記述するのに ρ，p，T，$\mathbf{u}$ を採用するとすれば，それらは方程式系(1)〜(6)によって $\mathbf{x}$，t の函数として完全に決定される。なお，これらの方程式はすべて t を陽に含まないから，自律方程式系を作ることは明らかであろう。

§ 2. 流体運動の非線型性

流体運動を支配する方程式(1)〜(6)はいずれも伝達項（div の項）が非線型であるために，流体の運動は本質的に非線型現象である。このため，線型性を利用した既製の物理数学的手法はすべて，そのままでは適用できない。この非線型問題をいかに取扱うかについて，考えられる方法はつぎの三つに大別される。

（a）線型現象：　方程式が厳密に線型化される現象を持す。

（b）逐次近似：　非線型項を摂動でとり入れる。

（c）非線型理論：　非線型現象の個々の性質に即した解法

以上三つの方法は非線型問題の解法の三つの段階を表わしているといえる。線型，非線型という分類はあくまでも相対的なものにすぎない。ある現象に対してある数学的定式化が行われたとき，その方程式が非線型であれば，その現象は非線型現象と呼ばれる。しかし，同じ現象に別の定式化を行ったとき，現象が線型方程式あるいはそれからの摂動で記述されることもまたあり得るのである。そのような定式化を発見し，それからの摂動計算を行うのが上の(a)，(b)の方法である。これに対して，(a)，(b)と(c)との間には常に飛躍がある。(c)は個々の現象の特性に基づいた，あるいはそれを利用した解法というべきで，それ以上の一般的な性格は見出せない。強いて一般性を挙げるならば，それは考察の局所化ということであろうか。

つぎに，流体力学の各分野について，これらの三つの方法の展開を簡単にあとづけてみたい。

§3.　非圧縮性完全流体

このとき，$\rho = \mathrm{const.}$ $\mu = 0$.したがって粘性応力 $\sigma = 0$。渦度 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\ \mathbf{u}$ は保存され，渦は生成も消滅もしない。上流が一様な流れ，あるいは静止から出発した流れにおいては，渦度保存則によって流れの場はいたるところ渦なしでなければならないから，

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0\ .$$

このとき，$\mathbf{u}$ はポテンシャル，$\Phi(\mathbf{x})$ をもち，

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\ \Phi\ . \tag{7}$$

非圧縮流体において連続方程式(1)は

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

に帰着するが，これは Φ に対する方程式

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{x}) = 0$$

を与える。このようにして問題はポテンシャルΦに対する調和方程式を解くことに帰着する。(9)式は線型であるから，非圧縮完全流体の渦なし流は全くの線型現象(a)に属する。一般の3次元問題にはポテンシャル論，2次元問題には複素函数論が適用でき，流れの中の物体に働く力など実際的に重要な量も，単なる積分によって計算することができる。この流れの理論は数学的に完成されたといってよいが，現実の流れとの重大な喰い違いがその境界条件にある。すなわち，非粘性流体の流れでは固体群の表面で滑りが存在するのに対して，現実の（粘性）流体においては滑りはあってはならないのである。これについては次節の境界層理論の項を参照。

§ 4. 非圧縮粘性流体

$\rho = \mathrm{const}$，$\mu \neq 0$。この場合，渦定理は成立しない。連続式(8)と，運動方程式（Navier-Stokes方程式）

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underline{(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{10}$$

（$\nu = \mu/\rho$：動粘性率）によって$\mathbf{u}$とpが決定される。(10)式の非線型性（……の項）のために，問題は非線型である。非線型項の他の諸項に対する大きさの比はReynolds数 $R = UL/\nu$ （U：流れの場の代表的な速さ，L：代表的な長さ）で表わされる。

(a) 線型流

ある種の空間的に簡単な流れにおいては非線型項が自動的に消える。この種の流れに平行流，回転対称流などがある。とくに，円管内のPoisenille 流減衰渦などが実際的に興味がある。このほか，注目すべきことは，§ 3.で述べたポテンシャル流はそのまま粘性流としても厳密解を与えていることである（$\because \Delta\mathbf{u} = 0$）。ただし，前に述べたようにポテンシャル流は粘性境界条件は満していない。

(b) 逐次近似

$R \ll 1$ で成立する方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p + \nu \Delta \mathbf{u} \tag{11}$$

をStokes 方程式という。この線型方程式の解をStokes の近似解という。一様な流れの中の球の抵抗などがこの近似で求められている。しかし，Stokes 背理）。これはいかに小さいRの値においても，（11）式の成立範囲は物体近傍の有限領域に限られているということに基くものと思われる。この欠点を補うために提案された新しい線型化の方法は，非線型項のうちの $\mathbf{u}$ の一つを，一様流の流速Uでおきかえることである。このとき，（10）式は，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p + \nu \Delta \mathbf{u} \tag{12}$$

となり，これをOseen 方程式という。Oseen近似も全く矛盾をもたないわけではないが，Stokes 近似とは違って，これを出発点としてNavier-Stokes 方程式の逐次近似解へ進むことができる。ただし，逐次近似の常として，高次近似の計算は幾何級数的に困難になり，この方法では実用的なReynolds 数領域（ $R > 10^4$ ）まで進むことができない（ Stokes 近似の有効範囲は $R \leq 1$ ，Oseen 近似のそれは $R \leq 4$ 位）。

(c) 境界層理論

$R \to \infty$ の極限では，境界条件を除いてはポテンシャル流が成立する。そこで物体表面に薄い層を考え，その中でだけ $\nu \neq 0$ の影響が現われ，その層を媒介として，ポテンシャル流と粘性境界条件とが調和すると考える。この薄層を境界層という。この考えは数学的に矛盾のない非線型方程式を与え，その解として色々な形の物体表面の境界層の流れが求められた。この理論によって，§3. で述べたポテンシャルと流が現実性を与えられたといってよい。境界層理論は一種の漸近理論であり，それなりに矛盾を含んでいる。たとえばある形状の物体では境界層は物体の下流側で剝離してそこから下流では境界層の近似は成立しない。しかし，剝離点より下流の流れに対しても境界層の考えを適用することができ，それに基いて後流を解析することによって，物体の高いReynolds 数のもとでの抵抗などが求められている。

§ 5. 圧縮性完全流体：（肥田氏の講演を参照）

渦定理の成立は § 3. と同じであるが，この場合，連続方程式が非線型であるために問題は非線型である。圧縮性の影響は代表的な流速 U と局所音速 $c = \sqrt{dp/d\rho}$ との比，Mach 数 $M = U/c$ で測られる。

(a) 線型解

空間的な対称性をもつ吸いこみ，渦などの流れは圧縮性流体の場合にも拡張される。

この分類において特記すべき解法にホドグラフ法がある。これはホドグラフ変換によって方程式を厳密なままで線型方程式に帰着させる優れた方法である。ホドグラフ法は高速気流のすべての問題に適用することができるが，解がホドグラフ面において得られるため，実際の物理面における境界条件を課し難いという難点がある。これに関連して，ホドグラフ解の孤立性，衝撃波などで不連続面を含まない超音速解が存在するかどうか，などの原理的な内題が発生する。

(b) 逐次近似

圧縮性の影響を Mach 数のベキ級数の形でとり入れる M^2 展開法，薄い物体に対して解を一様流からの摂動の形で求める薄　展開法などがある。

(c) 非線型理論

圧縮性完全流体に関する限り，非線型問題はすべてホドグラフ法によって線型問題に帰着される。問題はホドグラフ方程式の近似解法と，ホドグラフ解の実在性に関する議論ではないかと思われる。

§ 6. 圧縮性粘性流体

この流体に関して従来とり扱われてきた現象は主として波動である。

(a) 線型解

音波，Alfven 波（電気伝導性ある場合）などがこれに対応する。

(b) 非線型波（矢島氏の講演を参照）

衝撃波，有限振幅の表面波などがこれに当る。この場合，問題は常微分方程式の非線型問題だから，非線型問題としては取扱いは楽な方である。むしろ，問題は狭義の流体以外の媒質（たとえばプラズマ）において，消散項（ν）がなくても衝撃波のような不連続面が存在するかどうか，あるには存在のために

は媒質にどのような属性をとり入れなければならないかの問題に移る。

§7. 乱　流

§§3.～6.における流体の性質による分類とは違って，運動形態による分類である。

まず，乱流の発生に関する方面。

a）線型安定理論

対象は主として平行流である。これに微小攪乱を加え，攪乱について2次の項を省略した線型方程式を解いて，流れが不安定化する条件を求める。流れがReynolds数をパラメターとするときは，Reynolds数のある値，臨界Reynolds数 R_c が不安定条件を与える。

b）非線型，準線型安定理論（後藤氏の講演参照）

不安定攪乱が成長してから，高波数の攪乱を誘発して乱流に遷移するか，あるいはそのままの形に落着いて新しい層流を作るかを調べる。この場合，攪乱の大きさは有限だから攪乱を支配する方程式は非線型である。この非線型方程式を逐次近似法で解く。その第一段階を等線型理論という。

c）完全に発達した乱流

発達した乱流は無数の波数成分を含むために，線型安定理論から出発する逐次近似解法は届かない。むしろ，統計的平衡状態の存在を前提して，乱流の統計的記述に進む方が実際的である。しかし，この実際的な方法といえども，まだ理論的な骨格ができていない。

つぎに，乱流の統計理論について，乱れそのものの性質を論ずるために，平均流のない一様な乱れの場を考え，必要とあらばそれ以上の単純化である等方性も仮定する。速度 $\mathbf{u}$ を確率変数とし，その分布函数，特性函数，あるいは相関，スペクトルなどの平均量を取扱う。

(a) 線型理論

Stokes方程式に従う運動の集団を考えることに相当している。分布函数を支配する方程式は熱伝導型方程式となり，解は初期条件を含んで閉じた形に求められる。

(b) 逐次近似

乱れのReynolds数のベキ級数に解を展開する方法で，キュムラント展開法などがこれに対応する。第一段階は準正規分布理論とよばれる。この展開も§4.(b)の逐次近似と同じく，高次近似に進むにつれて解は急速に複雑になる。

(c) 非線型理論

完全な非線型理論はまだない。§4.(c)からの類推でいえば，乱れの高波数成分だけに着目した理論が有効であるように思われる。Kolmogorov の局所相似性理論がその思想に基づいているが，運動方程式との結びつけが欠けている。境界層理論の乱流版が待望される。

層流の非線型安定理論

後藤 金英（京大・解理解析研）

1. はじめに

流体の流れには，層状をなして規則正しく流れる“層流”と，速度・圧力などが平均値からの不規則な変動を伴う“乱流”と，二つの運動状態がある。密度一定の流体を対象とすると，この二つの運動状態は，同一境界条件のもとでは，流れの代表的な速さU，長さL，および流体の動粘性率νから作られる無次元量UL/ν（＝R：レイノルズ数）によって区別される。即ち，Rが小さければ，流れは層流であり，ある臨界値より大きくなると，乱れはじめ，やがて乱流となる。この臨界状態は，乱れの発生問題として，理論的には次のように取り扱われる。

層流として，定常運動をとりあげよう。これは，基礎方程式の定常解である。ところで，現実の流体運動では，この定常解に，外部から制御できない微小な乱れが常に伴う。この乱れは，流れのレイノルズ数が臨界値以下であれば減衰し，臨界値を越えると増巾されるとすれば，現象を説明し得る。乱れの強さが無限小であれば，乱れの方程式は線型化可能で，初期値・境界値問題は固有値問題となり，Rの臨界値が定まる。この取り扱いが線型安定理論である。